

# Cluster 模型による核反応の解析<sup>※</sup>

柳 瀬 安 生

Cluster Model Analysis of Nuclear Reactions<sup>※</sup>

By

Yasuo YANASE

The angular distributions and the cross sections for the  $\text{Li}^6(n,t)\text{He}^4$  reactions have been studied in Born approximation, by using a cluster model which is due to WILDERMUTH *et al.* These results were compared with simple "lump" stripping calculations of the  $\text{Li}^6(n,t)\text{He}^4$  reactions previously reported by SAWICKI *et al.*, and author.

These calculated results for the  $\text{Li}^6(n,t)\text{He}^4$  are considered to be in satisfactory agreement with the experimental results.

## § 1 ま え お き

最近、WILDERMUTH と彼の協同研究者達は、軽い原子核のエネルギー準位を cluster 模型で計算し可成りの成功をおさめた。1) 2) 3) 4) 5) 彼等の方法は、核構成にあづかる力をすべて2体力の重畳と見做し、2体力としては、40 Mev 以下の散乱データや他の実験データにも合うように選ばれた、所謂 Serber 型の核力を用い、殻構造模型を考慮した試験関数で核の状態を表わし、RITZ の変分法を採用し、面倒な計算を行ったものである。その結果、従来核反応の解析に用いられていた軽い核の波動関数とは相当異なったものが提出された。

核反応、主として中程度以下のエネルギーでの、軽い核による反応を理論的に解析して行く際には、核反応の反応機構に焦点が向けられ、初期状態や終状態を表わす波動関数には余り深い感心がはらわれていないようである。核反応機構の理解には、核反応にあづかる核の構造に関する正しい知識が必要であることは当然であろう。従って、いたずらに新しい反応機構を探すより、信頼性のより大きい模型を使って、反応前、反応後の状態を記述し、再検討して見るのも一つの方法であろう。

このノートでは、WILDERMUTH の cluster 模型で核の波動関数を表わし、従来の簡単な核模型を採用した場合の結果とを比較検討して見ることにする。波動関数のとり方が結果にどのように影響を与えるか、

※ 水産講習所研究業績 第363号, 1962年1月18日 受理.

Contribution from the Shimonoseki College of Fisheries, No. 363.

Received Jan. 18, 1962.

を見るためには、できるだけ簡単な具体例を採用するのが便利である。そこで、 $\text{Li}^0(n, H^3)\text{He}^1$  の角度分布および全反応断面積の計算を行なう。この反応は直接過程として既に解析されたものであり、また、WILDERMUTH の cluster 模型で考える場合も、 $\text{Li}^7$  を  $(\text{Li}^6\text{-cluster}) + (\text{n}^1\text{粒子})$  とすると束縛状態は存在しないことが既に明らかにされている<sup>5)</sup>。それ故、ここでも、直接過程だけで充分取扱えるものと思われる。既出の計算との比較という、目的もあるので、Coulomb 相互作用をはじめ、この反応に、余り有効とは思われないような相互作用は無視し、しかも、Born 近似を用いることにする。

## § 2 Cluster 模型

A個の核子からなる原子核のハミルトニアンを

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + \sum_{i>j} V_{ij} \quad (1)$$

と取る。ここに、 $V_{ij}$  は  $i$  番目の核子と  $j$  番目の核子との間に作用するポテンシャルである。このポテンシャルが調和振動子型のものであれば、全体の重心運動と内部運動を交わす部分とに分離できる。そこで、2体力として、飽和性を現わさない、即ち、固い芯を持たないが 40 Mev 位迄では、充分に実験データを説明できる Serber 型のポテンシャル

$$V_{ij} = -V_0 e^{-\kappa r_{ij}^2} \left\{ W \left[ 1 - \frac{1}{4} (1 + \sigma_i \cdot \sigma_j) (1 + \tau_i \cdot \tau_j) \right] + b \left[ \frac{1}{2} (1 + \sigma_i \cdot \sigma_j) - \frac{1}{2} (1 + \tau_i \cdot \tau_j) \right] \right\} \quad (2)$$

但し、 $V_0 = 68.6$  Mev,  $\kappa = 4.16 \times 10^{13} \text{cm}^{-2}$ ,

$W = 0.41$  および  $b = 0.09$

を用い、内部運動を表わすと考えられる波動関数を、更に2つの cluster に分け、それぞれの cluster の内部構造を表わす部分と、それらの相対運動を表わす部分との積に書き表わす。しかし、このことは非常に面倒であるから、液構造の考えに従い、適当にパラメーターを導入することによって、2つの cluster の内部構造を表わすものと、それらの相対運動を表わすものとの積として核の内部構造を表わす波動関数を作る。その波動関数を試験関数とし、核の内部運動のハミルトニアン  $H'$  の期待値

$$E = \frac{\int \psi^* H' \psi d\tau}{\int \psi^* \psi d\tau} \quad (3)$$

を試験関数に導入されたすべてのパラメーターで変分をとり、 $E$  を極小にするような  $\psi$  を求めることができる。

具体例としての  $\text{Li}^6$  の基底状態の波動関数は、 $\text{Li}^6$  の性質<sup>6)</sup> :

- 1).  $(\gamma, d)$ ,  $(\gamma, n)$ ,  $(\gamma, p)$  および  $(\gamma, \text{He}^3)$  の threshold はそれぞれ、4.7, 5.8, 4.8, および 25 Mev である。
- 2).  $\text{Li}^6$  のスピンと重水素核のスピンは共に 1 である。
- 3).  $\text{Li}^6$  の磁気能率は重水素核のそれとほぼ等しい。

等を考慮すると、定性的に

$$\psi = A \{ \phi(\alpha) \varphi(d) \chi(\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_d) \} \quad (4)$$

但し、 $\phi(\alpha)$  は  $\alpha$ -cluster の内部波動関数

$\varphi(d)$  は重水素核の内部波動関数

$\chi(\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_d)$  は相対運動の波動関数

### Cluster による核反応の解析

Aは反対称演算子である。

のようにとることができる。幸にも、WILDERMUTH とその協同研究者達<sup>7)</sup>によって、この模型で Li<sup>6</sup> の詳しい計算が IBM 650 を用いてなされている。ここでは、その結果を借用させて頂くことにする。Li<sup>6</sup> の基底状態の波動関数は

$$\psi = AC \left\{ \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^4 \rho_i^2 - \frac{\bar{\alpha}}{2} \sum_{j=5}^6 \rho_j^2\right) R^2 Y_{00}(\mathbf{R}/R) \exp\left(-\frac{2}{3}\beta R^2\right) \times \right. \\ \left. \times \xi(1234; 56) \right\} \quad (5)$$

となる。但し、Cは規格因子、 $\xi$ は Charge Spin 関数であり、 $\rho_i$ は  $\alpha$ -cluster の重心からの  $i$  番目の粒子の位置、 $\rho_i$ は重水素核 -cluster の重心に対する  $j$  番目の粒子の位置座標であり、 $\mathbf{R}$ は重水素核 -cluster の重心からの  $\alpha$ -cluster の重心の位置を示すものである。また、 $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$  の値はそれぞれ

$$\alpha = 4.33 \times 10^{25} \text{ cm}^{-2}, \quad \bar{\alpha} = 6.58 \times 10^{25} \text{ cm}^{-2} \\ \beta = 3.29 \times 10^{25} \text{ cm}^{-2}$$

である。

この波動関数を核反応計算に用いる場合、簡単化のためにスピノ関数をとっておき、

$$\psi = C \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^4 \rho_i^2 - \frac{\bar{\alpha}}{2} \sum_{j=5}^6 \rho_j^2\right) (R^2 \exp\left(-\frac{2}{3}\beta R^2\right)) \zeta \quad (6)$$

を用いても本質的な変化は現われなないと思われる。

### § 3 Li<sup>6</sup>(n, H<sup>3</sup>)He<sup>4</sup>の角度分布の計算

Li<sup>6</sup>(n, H<sup>3</sup>)He<sup>4</sup> 反応の角度分布の実験は FRY<sup>7)</sup> および WEDDELL 達<sup>8)</sup>によって、実験室系で、入射中性子エネルギー1.5, 2および 14Mev に対して報告されている。一方、DABROWSKI と SAWICKI<sup>10)</sup>によって、理論的解析が行なわれた。彼等は標的核 Li<sup>6</sup> を  $\alpha$ -cluster と重水素核 -cluster が簡単な s 状態の束縛をなしていると思われ、反応に最も大きな寄与を与える相互作用を入射中性子と Li<sup>6</sup> を構成している重水素核 -cluster の間に作用する相互作用  $V_{n,d}$  と仮定し、直接反応過程で、Li<sup>6</sup> 中の重水素核が入射中性子によりはぎとられ、重水素核 -cluster と入射中性子が H<sup>3</sup> を形成し、しかも、He<sup>4</sup> および H<sup>3</sup> は共に基底状態に留まっているとして、計算を行なっている。比較の目的で、我々は、できるだけ彼等の計算法を踏しゆうすることにする。

Li の  $\alpha$ -cluster の重心から重水素核 -cluster の重心迄のベクトルを  $\mathbf{r}$ 、 $\alpha$ -cluster の重心座標を  $\mathbf{r}_\alpha$ 、重水素核 -cluster の構成粒子の中性子座標を  $\mathbf{r}_n$ 、陽子座標を  $\mathbf{r}_p$ 、入射中性子の座標を  $\mathbf{r}_0$  とすれば、初期状態の波動関数を  $\psi_i$ 、終状態の He<sup>4</sup> および H<sup>3</sup> の内部波動関数をそれぞれ  $\chi$  および  $\xi_i$  で表わすことにより、微分断面積は次の式で与えられる。

$$-\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar^2}\right)^2 M_i^* M_0^* \left(\frac{k_f}{k_0}\right) \left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) \times \\ \times \sum_{\mu_0, \mu_d, \mu_t} |\langle \chi \xi_t \exp[i\mathbf{k}_t \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}/3)] | V_{n,d} \psi_i \rangle|^2 \quad (7)$$

但し、 $M_i^*$ 、 $M_0^*$ はそれぞれ H<sup>3</sup>、入射中性子の換算質量であり、 $\mathbf{K}_i$  および  $\mathbf{K}_0$  はそれぞれ H<sup>3</sup> および入射中性子の波動ベクトルであり、また、

$$r = -R_\alpha + (r_n + r_p) / 2,$$

$$s = -r_0 + (r_n + r_p) / 2$$

である。  $\sum_{\mu_0, \mu_d, \mu_t}$  は入射中性子, 重水核,  $H^3$  のそれぞれの磁気能率に亘っての和を意味する。

ここで, 初期状態の波動関数は, 入射中性子のスピン関数を  $\xi(\mu_0, \rho_0)$  と取れば,

$$\psi_i = \xi(\mu_0, \rho_0) \exp[iK_0 \cdot (\frac{2}{3}r - s)] \quad (8)$$

と表わされる。

次に, 終状態の  $H^3$  の波動関数は,

$$u = r_p - r_n$$

とおくことにより,

$$z_t = \left[ 3\sqrt{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\pi}{\alpha'}\right)^3 \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha'}{2} \cdot \left( \frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{2}u^2 \right) \right\} \quad (9)$$

と取れる。但し,  $\eta$  はスピン関数であり,  $\alpha'$  は  $H^3$  の基底状態のエネルギー固有値に対応するように決められるもので

$$\alpha' = 4.00 \times 10^{25} \text{ cm}^{-2}$$

である。

上述の波動関数を (7) 式に代入し, cluster 模型でとられた,  $\alpha$ -cluster の内部波動関数は自由な  $He^4$  のそれと殆んど差異がないので,  $\alpha$ -芯は closure 近似を用いることができる。また, 相互作用  $V_{n,d}$  は DABROWSKI および SAWICKI 処方と同様に, GERJUOY<sup>10)</sup> によって示されているように,  $\alpha$ -cluster と重水素核-cluster との相互作用にすりかえる。計算を簡単にするために, この相互作用を, よく知られているように<sup>11)</sup>, 波動方程式を用いることによって消去する。途中の計算は初等的に行なえるので省略する。上述の計算を行なえば, 反応微分断面積として, 次の結果が得られる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 5.4 \frac{\pi}{h^4} M_i^* M_0^* \left(\frac{k_t}{k_0}\right) \frac{\alpha}{\beta^4} \frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{(\alpha+\alpha)^3} \left[ B_d + \frac{\hbar_0^2}{8M} \left(\frac{2}{3}K_0 - K_t\right)^2 \right]^2 \times \\ \times \left( 4\beta - \left| \frac{2}{3}K_0 - K_t \right|^2 \right)^2 \exp \left\{ -\frac{3}{2} \left( \frac{\left| \frac{2}{3}K_0 - K_t \right|^2}{2\beta} + \frac{\left| \frac{1}{3}K_t - K_0 \right|^2}{\alpha'} \right) \right\} \quad (10)$$

但し,  $M$  は核子の質量であり,  $B_d$  は  $Li^6$  の基底状態における,  $\alpha$ -cluster と重水素核-cluster との結合エネルギーである。

反応の角度分布は, 標的核の波動関数を上述の cluster 模型で置き換えても, 反応機構を同じように取る限り大きな変更は期待できない。従って, 入射中性子エネルギー 14 Mev の場合について数値計算を行なえば充分であろう。この反応の  $Q$  値は 4.65 Mev である。それ故, 実験室系での入射粒子のエネルギーを  $E_0$ , 重心静止系での initial channel エネルギーおよび final channel エネルギーをそれぞれ  $\epsilon_i$  および  $\epsilon_f$  とすれば, 次の関係式により  $|K_0|$ ,  $|K_t|$  が求められる。

$$E_0 = \frac{7}{6}\epsilon_i, \quad \epsilon_i + Q = \epsilon_f$$

$$|K_0| = (2M_0^* \epsilon_i)^{\frac{1}{2}} \hbar^{-1}, \quad |K_t| = (2M_t^* \epsilon_f)^{\frac{1}{2}} \hbar^{-1}$$

$E_0 = 14$  Mev として  $|K_0| = k_0$ ,  $|K_t| = k_t$  を求め (10) 式を計算した結果は第 1 図に示される。なお, 第 1 図には DABROWSKI および SAWICKI によって計算された結果も書かれている。但し, 彼等の計算結果

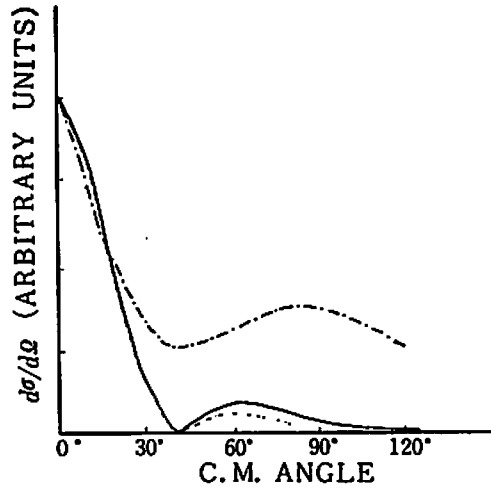


Fig. 1. Angular distribution at a laboratory bombarding energy of 14 Mev for the  $\text{Li}^6(n,t)\text{He}^4$  reaction. The solid line is the theoretical result from this paper, the dashed line is the result of Dabrowski et al. with the channel radius  $R_0 = 4 \times 10^{-13}$  cm (reference 9) and the dot-dash-dot line is the data of Frye (reference 7).

の中、図示されているものは、 $\alpha$ -粒子と重水素の弾性散乱に対して LAURITSEN, *et al.*,<sup>6)</sup> によってきめられた、Channel radius  $R_0 = 4 \times 10^{-13}$  cm を採用した場合の結果である。参考のため、FRY のデータも図示されている。

#### § 4 全反応断面積

$\text{Li}^6(n, \text{H}^3)\text{He}^4$  の全反応断面積の入射中性子エネルギーに対する依存性は、 $\text{Li}^6(n, \alpha)\text{H}^3$  のそれと同等であると考えられる。後者の場合は RIBE<sup>11)</sup> によって測定がなされ、著者<sup>12)</sup> によって  $\text{Li}^6$  を DABROWSKI 達と同様な模型で取扱った場合の結果が出されている。

WILDERMUTH 達の cluster 模型を採用した場合は、§ 3 で求められた微分断面積の式 (10) を立体角  $d\Omega$  に亘って積分を行なえばよい。この積分は  $K_0$  を軸として行なえば、少々面倒ではあるが、初等的な計算で行なうことができる。結果は相当複雑なものとなるが、斯様にして得られ結果の中に含まれている、 $k_0$  および  $k_t$  をそれぞれ

$$k_0 = \frac{6}{7} \cdot \frac{(2ME_0)^{\frac{1}{2}}}{\hbar}, \quad k_t = \frac{6}{7} \cdot \frac{\{2M(2E_0 + \frac{7}{3}Q)\}^{\frac{1}{2}}}{\hbar}$$

の関係式を用い、 $k_0$  および  $k_t$  を消去すれば、

$$\sigma = \sigma(E_0)$$

なる結果が得られる。

数値計算の結果を幾つかの  $E_0$  の値に対して表示すると、第 1 表のようになる。この表にも簡単な模型の使用によった結果をも併記しておくことと便利であろう。従って、第 1 表にこのノートによる計算結果および以前に提出された結果をそれぞれ  $\sigma_n$  および  $\sigma_0$  で区別して表示する。

Table 1.

$E_0$ Mev	0.2	0.3	0.4	0.5	1	2	3	4	5	7
$\sigma_n$ Barns	1.57	1.32	1.02	0.94	0.39	0.32	0.21	0.13	0.083	0.028
$\sigma_0$ Barns	1.33	1.03	0.84	—	0.34	0.099	0.031	0.011	0.0034	0.0004

不幸にも、測定結果は図示されたものである。従って、参考のため、測定結果、 $\rho_n(E_0)$  および  $\sigma_0(E_0)$  を一緒に図示すると、第2図に示されるものになる。

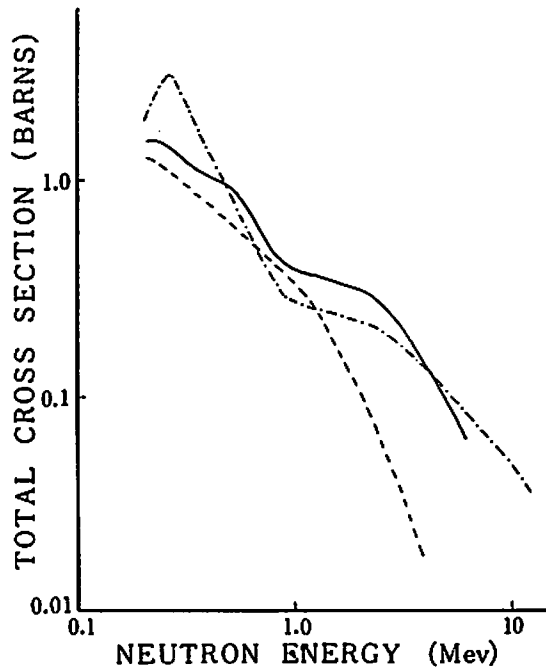


Fig. 2. Variation of the total cross section for the  $\text{Li}^6(n,t)\text{He}^4$  reaction with incident neutron energy in the laboratory system. The solid line is the result from this paper, the dashed line is the result previously reported by author (reference 12) and the dot-dash-dot line is the data of Ribe(reference 11).

## § 5 結 び

§ 3で取扱われた微分断面積の計算結果は、予想されていたように、DABROWSKI *et al.* のものと、同じ反応機構を考えて計算が進められた、という理由で、 $\text{Li}^6$  の核模型の選択には余り左右されず、図示されているように、非常に似かよったものとなった。このことから、反応にあづかる核の状態を表現する場合、核のエネルギー単位の様相を定性的に再現できるような波動関数を採択すれば、反応微分断面積の角度依存性に及ぼす波動関数の不確かさによる影響は、殆んど無視できると思われる。ただ、このノートでの計算結果の方が、簡単な模型を使用した結果より、比較的大きな角度では、大きな値を与えているように見られる

## Cluster による核反応の解析

が、何れの結果も、実験値を可成り下回っている。このような事情は LIKELY および BRADY<sup>13)</sup> によって示されている。Li<sup>6</sup>(p, He<sup>3</sup>)He<sup>1</sup> の反応についても見られるものである。この反応の場合は、終状態の測定の際に、He<sup>3</sup> と He<sup>1</sup> の区別が可成り困難となって来ることから生ずる実験誤差も存在するであろうが、比較的大きな角度での核反応は、入射粒子と Li<sup>6</sup> の  $\alpha$ -cluster との直接相互作用による寄与であろうと考えられている。何れの計算も Coulomb 相互作用は考慮されておらず、中性子と陽子の質量差も考慮されていない。従って、LIKELY および BRADY のものと同様な解釈をしても差しつかえないと思われる。

全反応断面積、或は微分反応断面積の絶対値を問題にする場合は、例えば、第2図に図示されているように、波動関数の選択によって可成り異なった結果が与えられる。Li<sup>6</sup> として簡単な定性的模型を使用した場合は、入射粒子のエネルギーが増加するに従って、反応断面積の値は可成り急激な減少を示している。それに対して、もっと定量的である cluster 模型が用いられた場合には、実線で図示されているように、入射粒子のエネルギーが 1Mev 程度のところで割合に緩やかなエネルギー依存性を示し、2~3Mev 以上の入射エネルギーに対しては、前者の結果とは桁数迄異って来るようである。参考のために引用された実験曲線と比較すると、低エネルギー領域および 3Mev 近くより高いエネルギー領域で幾分異なった依存性を示しているように見られるが、低エネルギー領域は、終状態の Coulomb 相互作用も考慮の要があるように思われる。また、エネルギーが高くなって来ると、Li<sup>6</sup>(n,  $\alpha$ )H<sup>3</sup> 反応では、Li<sup>6</sup>(n,  $\alpha$ )n, d 反応が可成り混るものと思われる。一般に核反応の断面積は、直接過程で取り扱おうと、可成り小さな絶対値が得られている。特に、大きな反応角に対して、大きな反応断面積を生ずると考えらなっている heavy particle stripping 過程に、簡単な定性的核模型を使用すると、その反応断面積は非常に小さなものとなる<sup>14)</sup>。定量的な核模型を使った heavy particle stripping の計算は残念ながら、現在迄見あたりません。

ここで用いた cluster 模型は、核の基底状態およびそれ以上の数個の励起状態をも、可成り定量的に解析できるように作られたものである。従って、斯様な模型を使用することにより複合核形成過程が介入する反応か、否か、を決定できれば幸である。幸にも、このノートの反応例では、Li<sup>7</sup> の Li<sup>6</sup>-cluster と中性子とによる cluster 模型は不可能であり、Li<sup>6</sup>(n, H<sup>3</sup>)He<sup>1</sup> 反応は直接過程で充分解析できるものであった。

## 参 考 文 献

- 1) WILDERMUTH, K., and Th. KANELLOPOULOS, 1958 : *Nuclear Physics*, **7**, 150.
- 2) WILDERMUTH, K., and Th. KANELLOPOULOS, 1958, '59 : *Nuclear Physics*, **9**, 449.
- 3) PEARLSTEIN, L. D., Y. C. TANG and K. WILDERMUTH, 1960 : *Nuclear Physics*, **18**, 23.
- 4) TANG, Y. C., K. WILDERMUTH and L. D. PEARLSTEIN, 1961 : *Phys. Rev.*, **123**, 548.
- 5) KHANNA, F. C., Y. C. TANG and K. WILDERMUTH, 1961 : *Phys. Rev.*, **124**, 515.
- 6) LAURITSEN, *et al.*, 1953 : *Phys. Rev.*, **92**, 1501.
- 7) FRYE, G. M., 1954 : *Phys. Rev.*, **93**, 1026.
- 8) WEDDELL, and ROBERTS, 1954 : *Phys. Rev.*, **59**, 117.
- 9) DABROWSKI, J. and J. SAWICKI, 1955 : *Phys. Rev.*, **97**, 1002.
- 10) GERJUOY, E., 1953 : *Phys. Rev.*, **91**, 645.
- 11) RIBE, F. L., 1956 : *Phys. Rev.*, **103**, 741.
- 12) 柳瀬安生, 1957 : 本報告, **3**, 35.
- 13) LIKELY, J. G., and F. P. BRADY, 1956 : *Phys. Rev.*, **104**, 118.
- 14) DABROWSKI, J., and J. SAWICKI, 1954 : *Nuovo Cimento.*, **12**, 293.